4.8 Dimension von Unterräumen

Satz: Sei V' ein Unterraum von V.

(a) Dann gilt $\dim(V') \leqslant \dim(V)$.

(b) Gilt weiter $\dim(V') = \dim(V) < \infty$, so folgt $V' = V$.

Bew. (a) Sei B' eine Basis von V'.
Dann ist B' lin. unabh., folglich
existiert eine Basis B von V mit $\boxed{B' \subset B}$.
$\Rightarrow \dim(V') = |B'| \leq |B| = \dim(V)$.

(b) Dann ist $|B'| = |B| < \infty$
$\Rightarrow B' = B$.
$\Rightarrow V' = \langle B' \rangle = \langle B \rangle = V$. qed.

Proposition: Für jeden Unterraum U des Raums der Spaltenvektoren K^n kann man jede der folgenden Beschreibungen effektiv in jede andere umrechnen:

(a) Als Erzeugnis von Vektoren $u_1, \ldots, u_k \in K^n$.

(b) Durch eine Basis $u_1, \ldots, u_\ell$ von U.

(c) Als Lösungsmenge eines homogenen LGS der Form $Ax = 0$ für eine Matrix A.

Bew.: U Unterraum $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(K^n) = n$. $\Rightarrow$ kann U wie in (b) beschreiben mit $\ell \leq n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) ✓

(c) $\Rightarrow$ (b) Löse das LGS. Siehe §3.9.

(a) $\Rightarrow$ (c) Setze $B := (u_1, \ldots, u_k)$ $n \times k$-Matrix. Gauss Elimination $\Rightarrow$ M invertierbar, P Permutationsmatrix
so dass $M \cdot B^T \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{smallmatrix} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow D := (M \cdot B^T \cdot P)^T = P^T \cdot B \cdot M^T = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right)$ für eine Matrix C.

$U = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K\} = \left\{ B \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \right\} = B \cdot K^k$ $\Rightarrow P \cdot D \cdot (M^T)^{-1} = B$.

$\Rightarrow \underbrace{U} = P \cdot D \underbrace{(N^T)}_{\text{inv.bar}}^{-1} K^k \overset{\curvearrowleft}{=} \underbrace{P \cdot \underbrace{D \cdot K^k}}$. da $(N^T)^{-1} \cdot K^k = K^k$.

$D \cdot K^k = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) K^k = \boxed{\text{Erzeugnis aller Spalten von } \begin{array}{c} \overset{l}{\sim} \\ \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}l \\ \}n-l \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \dim(DK^k) = l}$

Beh.: $\underline{D \cdot K^k} \overset{!}{=} \underline{\{ y \in K^n \mid \underbrace{\{(C, -I)}_{n-l}\underbrace{}_{n} \cdot y = 0 \}}$. **Denn:** $(C, -I) \cdot \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \cdot K^k$

$= \left(0 \mid 0 \right) \cdot K^k = \{0\}$.

selbe Dimension l mit "C".

$\Rightarrow \forall u \in K^n : \quad u \in U \Leftrightarrow P^{-1} \cdot u \in P^{-1} U = DK^k$

$\Leftrightarrow (C, -I) \cdot P^{-1} \cdot u = 0$.

Also ist $U = \{ u \in K^n \mid \underbrace{(C, -I) \cdot P^{-1}} \cdot u = 0 \}$

qed.

Bem.: $U = P \cdot D \cdot K^k$ hat als Basis die Spalten von $P \cdot \begin{pmatrix} I \\ C \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Diese Beschreibungen benutzt man zur Berechnung von Summen und Durchschnitten von Unterräumen von K^n, wie folgt:

(a) Aus $U = \langle S \rangle$ und $U' = \langle S' \rangle$ folgt $U + U' = \langle S \cup S' \rangle$.

(b) Aus $U = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ und $U' = \{x \in K^n \mid A'x = 0\}$ folgt $U \cap U' = \{x \in K^n \mid \binom{A}{A'} x = 0\}$.

Bsp.: $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{Q}^3$.

Löse $(a,b,c) \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 4\\3 & 2\end{pmatrix} = (0,0) \iff \begin{matrix} a+2b+3c=0 \\ 4b+2c=0 \end{matrix}$

$\iff \dots \iff \left| \begin{matrix} c = -2b \\ a = 4b \end{matrix} \right.$

$\iff (a,b,c) \in \mathbb{Q} \cdot (4,1,-2)$

$\Rightarrow U = \{ v \in \mathbb{Q}^3 \mid (4,1,-2)\, v = 0 \}$.

Bsp.: $U \cap U'$ für $U' = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$v \in U \cap U' \iff \exists \lambda, \mu, \nu : \quad v = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} = \nu \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$\iff \left| \begin{matrix} \lambda = 2\nu \\ 2\lambda + 4\mu = 2\nu \\ 3\lambda + 2\mu = \nu \end{matrix} \right| \iff \left| \begin{matrix} \lambda = 2\nu \\ 4\nu + 4\mu = 2\nu \\ 6\nu + 2\mu = \nu \end{matrix} \right| \iff \left| \begin{matrix} \lambda = 2\nu \\ 2\nu + 4\mu = 0 \\ 5\nu + 2\mu = 0 \end{matrix} \right| \iff \left| \begin{matrix} \lambda = 2\nu \\ \nu = \mu = 0 \end{matrix} \right|$

$\Rightarrow U \cap U' = \{0\}$.

4.9 Direkte Summen, Komplemente

Definition: Seien V_1 und V_2 Unterräume von V mit $\overset{(A)}{\boxed{V = V_1 + V_2}}$ und $\overset{(B)}{\boxed{V_1 \cap V_2 = \{0\}}}$. Dann heisst V die *(innere) direkte Summe von V_1 und V_2*, und wir schreiben

$$V \;=\; V_1 \oplus V_2.$$

Weiter heisst dann V_2 ein *Komplement von V_1 in V*, und umgekehrt.

Proposition: Die genannten Bedingungen an V_1 und V_2 sind äquivalent zu der Bijektivität der Abbildung

$$\overset{(C)}{\boxed{V_1 \times V_2 \longrightarrow V,\ (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2.}}$$

Bem.: (A) $\Longleftrightarrow$ Abb. surjektiv.

Beh.: (B) $\Longleftrightarrow$ Abb. injektiv.

"$\Leftarrow$": Sei $v \in V_1 \cap V_2$. Dann ist $(v, -v) \mapsto v - v = 0$
und $(0,0) \mapsto 0$
Abb. injektiv $\Rightarrow (v,-v) = (0,0) \Rightarrow v = 0$.
Also ist $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

"$\Rightarrow$": Seien $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ mit demselben Bild.
Dann ist $v_1 + v_2 = w_1 + w_2 \Rightarrow v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$
$\Rightarrow v_1 - w_1 = w_2 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = w_1$ und $v_2 = w_2$. $\Rightarrow$ Abb. injektiv. qed.

Variante: Analog zu Summen beliebig vieler Teilräume von V kann man auch beliebige direkte Summen definieren. Siehe dazu §**??** sowie [Kowalsky-Michler, §2.3].

$V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow V$
$(v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 + \ldots + v_n$ bijektiv.

Beispiel: Es gilt $V = V \oplus \{0\}$; somit sind V und $\{0\}$ Komplemente voneinander in V.

Satz: Jeder Unterraum eines Vektorraums besitzt ein Komplement.

Bew.: $V' \subset V$. Wähle $\left\{ \begin{array}{l} \text{Basis } B' \text{ von } V' \\ \text{Basis } B \text{ von } V \end{array} \right\}$ mit $B' \subset B$.

$V' = \langle B' \rangle$

$V'' := \langle B \setminus B' \rangle$.

$V = \langle B \rangle$

Dann ist $V' + V'' = \langle B' \rangle + \langle B \setminus B' \rangle = \langle B \rangle = V$.

und $V' \cap V'' = \langle B' \rangle \cap \langle B \setminus B' \rangle = \{0\}$

da B lin. unabh.

$\Rightarrow V' \oplus V'' = V$.

qed.

Satz: Ist $V = V_1 \oplus V_2$, so gilt

$$\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

Bew.: B_1 Basis von V_1

B_2 Basis von V_2.

$\Rightarrow$ $\boxed{B_1 \cup B_2 \text{ disjunkt und Basis von } V_1 \oplus V_2}$.

disjunkt: $b \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow 0 \neq b \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Widerspruch.

$V = V_1 + V_2 = \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle = \langle B_1 \cup B_2 \rangle$.

$B_1 \cup B_2$ lin. unabh.: Wäre $\sum_{b \in B_1} x_b \cdot b + \sum_{b \in B_2} x_b \cdot b = 0$

$\Rightarrow \sum_{b \in B_1} x_b b = -\sum_{b \in B_2} x_b b \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \sum_{b \in B_1} x_b b = -\sum_{b \in B_2} x_b b = 0$

$\Rightarrow$ alle $x_b = 0$.

$\Rightarrow \dim(V) = |B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = \dim(V_1) + \dim(V_2)$. qed.

Beispiel: Sei $V_1 := \langle \binom{a}{b} \rangle \subset K^2$ für gegebene $a, b \in K$. Dann ist ...

$V_1 = \langle \binom{a}{b} \rangle$.

(a) ... $\langle \binom{1}{0} \rangle$ ein Komplement von V_1 genau dann, wenn $b \neq 0$ ist.

(b) ... $\langle \binom{0}{1} \rangle$ ein Komplement von V_1 genau dann, wenn $a \neq 0$ ist.

(c) ... V ein Komplement von V_1 genau dann, wenn $a = b = 0$ ist.

$\binom{1}{0}, \binom{a}{b}$ Basis.

$\binom{0}{1}, \binom{a}{b}$ Basis.

Satz: Für beliebige Unterräume V_1 und V_2 von V gilt

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) \; = \; \dim(V_1) + \dim(V_2).}$$

Ü

Bew.:

Setze $U := V_1 \cap V_2$.

Schreibe
$$V_1 = U \oplus U_1$$
$$V_2 = U \oplus U_2$$
$$V = (V_1 + V_2) \oplus U_3$$

Beh.: Dann gilt
$$V = U \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 .$$

Dann folgt: $\dim(V_1+V_2) + \dim(U_3) = \dim(V) = \dim U + \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3$

$$\Rightarrow \dim(V_1+V_2) = \dim U + \dim U_1 + \dim U_2 .$$

$$\Rightarrow \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim U + \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U$$
$$= \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

qed